L'EDUCAZIONE MATEMATICA

# INTRODUZIONE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE ATTRAVERSO GLI INDOVINELLI DI SMULLYAN

**Roberto De Leo**[1]

## ABSTRACT

*We present some idea on how to introduce the study of propositional logic in primary and secondary schools in an appealing way. In particular we encourage the use of logic puzzles and provide several examples of translating Smullyan's logic puzzles of his wonderful book "Alice in puzzle-land" into propositional logic and then use algebra to solve the puzzles. We highlight several strong points of this approach.*

**Parole chiave:** natural deduction system, propositional logic, logic puzzles, Raymond Smullyan.

## INTRODUZIONE

L'insegnamento della Logica nelle scuole non è impresa facile e rimane tuttora inadeguato (Gentilini, 2008). In questo articolo presentiamo una serie di spunti che possono aiutare l'introduzione di un capitolo della matematica così astratto e complesso perché riteniamo che il suo studio porterebbe gli studenti ad una comprensione migliore di tutta la matematica e avrebbe ripercussioni positive su tutte le altre materie e in particolare sull'Italiano. A questo fine il rigore formale sarà sacrificato dove possible in favore della leggibilità.

L'articolo è strutturato in tre sezioni.

Nella prima sezione inquadriamo la Logica all'interno della Matematica mediante un parallelo con la struttura dei giochi da tavolo. Questo da una parte fornisce una forte motivazione all'introduzione e studio della materia (condizione che riteniamo necessaria, anche se certo non sufficiente, ad accendere l'interesse degli studenti) e dall'altra costituisce una buona occasione (non sono mai abbastanza) per discutere di cosa sia, in essenza, la Matematica: non "scienza dei numeri e delle figure" ma piuttosto "scienza dei modelli", cioè la scienza che, con una metafora culinaria, dati certi ingredienti e certe ricette studia e classifica tutti i piatti che con esse si possono preparare.

Nella seconda sezione, in modo da rendere l'articolo autosufficiente, introduciamo brevemente la Logica Proposizionale utilizzando il sistema di deduzione naturale, che ha il vantaggio di usare regole di inferenza molto vicine a quelle che usiamo nel ragionamento naturale (da cui il nome) e poi mostriamo come le tavole di verità e la funzione di verità possano aiutarci a dimostrare teoremi.

Infine nella terza sezione mostriamo come utlizzare ognuno di questi metodi per la risoluzione di un tipo particolare di indovinelli logici, nella convinzione che un approccio all'insegnamento della Logica che la presenti come uno strumento capace di pemettere la risoluzione "algebrica" sistematica di indovinelli possa annullare o quanto meno rendere

[1]Liceo Scientifico Statale "L.B. Alberti", roberto.deleo@liceoalberti.it

minima la distanza che di solito si crea inevitabilmente tra gli studenti ed una disciplina così astratta.

Il contenuto di questo articolo è stato sviluppato dall'autore a partire dall'esperienza di insegnamento del "Laboratorio di Logica e Fondamenti della Matematica" nell'ambito del corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Cagliari tenuto tra il 2001 e il 2010 e in un corso PON di introduzione alla Logica rivolto ai docenti organizzato dall' Istituto Comprensivo Statale di Pula (CA).

## 1. LA MATEMATICA COME GIOCO DA TAVOLO (DI CUI LA LOGICA COSTITUISCE LE REGOLE)

Ingrediente primario e fondamentale per suscitare l'interesse degli studenti per una nuova disciplina è fornire dei forti argomenti in favore della sua introduzione: cosa la rende interessante? perché e quando è stata introdotta e che risultati "tangibili" ha avuto? in che modo la conoscenza di questa disciplina influenza la vita di tutti i giorni?

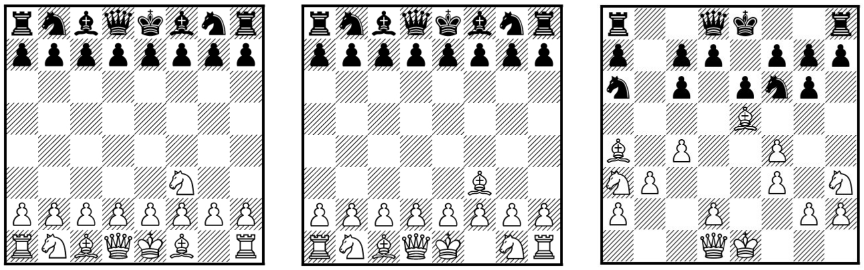
Ora, se da una parte la Logica costituisce indubbiamente une delle componenti più astratte (e di conseguenza più ostiche) della Matematica, dall'altra vanta una delle più forti motivazioni. La Logica infatti, avendo come oggetto di studio il ragionamento stesso, cioè quella componente per la quale siamo unici nel regno animale, si pone alla base non solo, ovviamente, della Matematica stessa e della Filosofia ma anche di qualunque altra forma di conoscenza e quindi di *tutte* le altre discipline. Conoscerla dunque significa migliorare la nostra capacità di discernere, da quando scegliamo l'abbonamento più conveniente per il cellulare a quando cerchiamo la dimostrazione ad un teorema.

Inoltre nelle ultime decine d'anni è diventato sempre più sviluppato il settore della Intelligenza Artificiale, per produrre la quale è ovviamente di primaria importanza capire la Intelligenza Naturale, cioè la nostra. A questo proposito consigliamo fortemente la lettura del libro di D. Hofstadter "Gödel, Escher, Bach" (Hofstadter, 1984), piacevolissima lettura ricca di spunti utilizzabili nell'insegnamento elementare della Logica (in particolare i numerosi dialoghi tra Achille e la Tartaruga, il sistema *MIU* e il sistema **pq**, vedi Appendice).

Una immagine che può aiutare a fissare questo concetto è quello della matematica come un gioco da tavolo. Questo in parte per la banale osservazione che il concetto di gioco è universalmente ben conosciuto[2] e in parte anche perché, da un certo punto di vista, la Matematica *è* anch'essa un vero e proprio "gioco da tavolo".

Un gioco da tavolo (ad esempio gli scacchi, si veda la Figura 1) infatti è costituito da tre elementi fondamentali, i *pezzi*, la *posizione iniziale* e le *regole*. Queste componenti hanno una diretta interpretazione in una qualunque teoria matematica: i pezzi corrispondono alle *definizioni di esistenza*, cioè agli oggetti di cui parla la teoria (ad esempio i punti e le rette nella geometria piana, i numeri nella teoria degli interi); la posizione iniziale corrisponde agli *assiomi* della teoria (ad esempio i cinque postulati di Euclide per la geometria piana o i postulati di Peano per gli interi); le regole corrispondono infine proprio al ragionamento naturale e quindi alla *Logica*.

[2]Il gioco da tavolo più antico di cui si ha notizia è Senet, risalente almeno al 3500 a.C. (Piccione, 1980), in anticipo di circa 3000 anni sulla geometria Euclidea.



(a) (b) (c)

Figura 1: Varie configurazioni dei pezzi degli scacchi sulla scacchiera. La (a) è lecita: il cavallo in g1 ha mosso in f3. Dunque (a) è un "teorema" nel gioco degli scacchi. La (b) è impossibile: nessun pedone ha evidentemente ancora mosso (perché i pedoni possono andare solo in una direzione e sono ancora tutti nella posizione di partenza) e l'alfiere non può passarci attraverso. Dunque la (b) non è un teorema, in altre parole non può mai verificarsi in una partita. La (c) è un ulteriore esempio, molto più complesso, di configurazione impossibile tratta da (Smullyan, 1979, pag. 98).

Durante una partita i giocatori, utilizzando le regole, generano nuove posizioni delle pedine sulla mappa a partire da quella iniziale (ad esempio si veda la Fig. 1(a)). Allo stesso modo i matematici utilizzano il ragionamento per generare nuove proposizioni (cioè i *teoremi* della teoria) a partire dagli assiomi. D'altra parte non tutte le configurazioni dei pezzi sulla scacchiera sono possibili (ad esempio si vedano le Figure 1(b) e 1(c)). In Matematica questo corrisponde ad affermazioni sugli oggetti della teoria che non discendono dagli assiomi scelti e quindi non sono vere in quella teoria. Ad esempio nella geometria Euclidea l'affermazione "la somma dei tre angoli di un triangolo vale 0" non può essere dimostrata sotto nessuna assunzione (ma può essere dimostrata, sotto particolari condizioni, in geometria iperbolica!).

Che la Matematica possa essere vista come un gioco è anche testimoniato dalla esistenza e popolarità di passatempo indubitabilmente matematici come il cubo di Rubik o il Sudoku (al momento si contano su MathSciNet ventotto articoli di ricerca a proposito del cubo di Rubik e trentotto a proposito del Sudoku). A questo proposito pensiamo sia interessante riportare che su più di una pagina web si possono trovare commenti del seguente tenore: "*When you first look at a game of Sudoku, the first though is aw yuck, math however this is not a math game. Sudoku is a logic reasoning game and there is no math involved. There are numbers, sure, but no math.*"[3]. Evidentemente chi ha scritto queste parole non ha le idee molto chiare su cosa sia la Matematica, forse la confonde con l'aritmetica (peraltro una strana aritmetica dove si eseguono meccanicamente dei calcoli, dato che il ragionamento non deve essere coinvolto), errore che probabilmente commettono anche molti dei nostri studenti. Sarebbe già un ottimo risultato se riuscissimo ad ottenere che alla fine del curriculum scolastico gli studenti abbiano almeno le idee chiare su cosa

[3]La prima volta che dai un'occhiata a una tavola di Sudoku pensi: oh no, Matematica! Tuttavia questo non è un gioco matematico. Sudoku è un gioco basato sul ragionamento logico e non ha a che fare in nessun modo con la matematica. Certo, ci sono numeri, certo, ma niente matematica.
http://www.associatedcontent.com/article/43100/sudoku_and_math_are_they_related.html

sia la Matematica.

La differenza tra il lavoro del matematico e quello del giocatore di Sudoku è non tanto nella sostanza quanto nel punto di vista. La risoluzione di una tavola di Sudoku o del cubo di Rubik può risultare un piacevole passatempo perché si può procedere per tentativi, quindi stimola la mente senza richiedere un eccessivo sforzo di concentrazione, ma dal punto di vista matematico non ha, in sé, granché rilevanza. Il matematico davanti al Sudoku si pone piuttosto domande quali condizioni di risolubitlità, condizioni per l'unicità della soluzione, classificazione delle soluzioni, algoritmi di risolubilità e così via – si vedano ad esempio (Rokiki, 2010) per il cubo di Rubik e (Taalman, 2007), (Herzberg and Murty, 2007) e (Crook, 2011) per il Sudoku. Ciononostante, sia il risolutore di passatempi che il matematico professionista stanno entrambi facendo matematica.

Crediamo che, da un punto di vista didattico, questa osservazione dovrebbe avere forti conseguenze concrete. L'insegnamento della Matematica a scuola infatti può seguire due direzioni quasi indipendenti. Da una parte può concentrarsi sull'insegnamento dei risultati di alcune teorie (la geometria Euclidea, la trigonometria, l'analisi matematica), aspetto fondamentale e in parte necessario in quanto tutte le discipline scientifiche usano la Matematica come linguaggio comune. In questo modo però la Matematica viene vista come uno strumento e lo studente è passivo: gli vengono presentati una serie di risultati, più o meno interessanti, con le relative dimostrazioni preconfezionate (quando c'è abbastanza tempo per presentare dimostrazioni...). Dall'altra invece potrebbe (e dovrebbe) concentrarsi su *fare attivamente* Matematica, cioè prendere una teoria (ad esempio la stessa geometria Euclidea o il "sistema *MIU*" di Hofstadter), partire dagli assiomi e dimostrare teoremi della teoria lasciando liberi gli studenti di trovare la propria strada.

Terminiamo questa sezione con due puntualizzazioni. Prima di tutto notiamo che, per via della grande complessità e ricchezza che solitamente una teoria matematica ha, il matematico non agisce "per tentativi" come chi risolve un passatempo ma piuttosto usa la sua conoscenza della teoria per intuire quali sono i concetti importanti all'interno di essa e quali proprietà possano essere importanti da studiare[4] e poi cerca di trovare le mosse che portano dagli assiomi ad esse (cioè la dimostazione). Un interessante esempio di quanto diversamente possa apparire un gioco agli occhi del matematico si trova nel libro di R. Smullyan "The Chess Mysteries of Sherlock Holmes" (apparentemente mai tradotto in Italiano) in cui i problemi, piuttosto che essere "il bianco muove e dá matto in tre mosse", sono del tipo "data la configurazione della scacchiera in figura, dire se è avvenuta o meno la promozione di un pedone".

Facciamo notare infine un fatto positivo importante, e nel farlo ci riferiamo al caso particolare degli scacchi. Ogni configurazione del gioco degli scacchi o è ottenibile dopo un numero finito di mosse o non lo è, non esiste una terza possibilità. Questo è dovuto al fatto che il numero di possibili configurazioni nella schiera è finito, e quindi in particolare abbiamo un sistema con un numero finito di teoremi. Una delle scoperte scientifiche più importanti del secolo scorso è che in Matematica tipicamente non è così: per il teorema di incompletezza di Gödel se una teoria consistente (cioè i cui assiomi non siano in contraddizione) è "sufficientemente complessa" (cioè se è ricca abbastanza da contenere all'interno l'aritmetica degli interi) allora è incompleta (cioè esistono properietà della teo-

[4] Da qui il ruolo fondamentale della immaginazione in Matematica e il famoso aneddoto secondo cui David Hilbert, saputo che uno dei suoi studenti aveva lasciato per studiare l'arte poetica, commentò: "Ha fatto bene, non aveva abbastanza immaginazione per fare il matematico!"

ria che non possono nè essere dimostrate nè confutate all'interno della teoria). L'esempio più famoso è quello del quinto postulato di Euclide: nella *geometria assoluta*, cioé la geometria che si ottiene da quella Euclidea per sottrazione del postulato delle parallele, l'affermazione dell'esistenza di una parallela ad una retta data (o, equivalentemente, della sua non esistenza) è indimostrabile e allo stesso modo è indimostrabile la sua negazione. Pertanto se si vuole trattare con le parallele è necessario prima assumere l'una o l'altra ipotesi. Si ottengono in questo modo tre diverse geometrie: la geometria ellittica quando si assume la non esistenza di parallele, la geometria euclidea e quella iperbolica nell'altro caso a seconda che si assuma o meno l'unicità della parallela. Per di più, sempre per il teorema di Gödel, questo fenomeno vale per i nuovi sistemi così ottenuti, per cui anche al loro interno si troveranno nuove proprietà nè vere nè false e per andare avanti occorrerà aggiungere nuovi assiomi. La Logica Proposizionale, come il gioco degli scacchi, non è sufficientemente ricca e quindi non presenta questo fenomeno.

## 2. LOGICA PROPOSIZIONALE

Ogni fenomeno complesso si può studiare a diversi livelli di "dettaglio" e il ragionamento naturale non fa eccezione. Quello della Logica Proposizionale è uno dei livelli più elementari. Gli oggetti di studio (i "pezzi" del gioco) qui sono da una parte le proposizioni del linguaggio comune alle quali sia possibile associare un valore di verità VERO/FALSO, indicate con lettere minuscole dell'alfabeto latino $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \dots$, e dall'altra le "operazioni" che permettono di combinarle. Storicamente si sono individuati cinque operatori fondamentali, uno unario e quattro binari:

1. Negazione ($\sim$): sostenere che "$\sim\mathbf{p}$" è vera significa sostenere che $\mathbf{p}$ è falsa.

2. Congiunzione ($\wedge$): sostenere che "$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$" è vera significa sostenere che sia $\mathbf{p}$ sia $\mathbf{q}$ sono vere.

3. Disgiunzione ($\vee$): sostenere che "$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$" è vera significa sostenere che almeno una tra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ è vera. Ricordiamo che nel linguaggio naturale la congiunzione disgiuntiva *o* ha due valori: uno inclusivo, nel senso di *o anche*, che è quello di $\vee$, ed uno esclusivo, ad esempio quello che viene usato in frasi del tipo "o la borsa o la vita!". In latino questa distinzione è esplicitata dall'uso di termini diversi: *vel* per la inclusiva (da cui il simbolo dell'operatore!) e *aut* per la esclusiva. Bisogna dunque fare molta attenzione quando si traduce dal linguaggio naturale a quello della Logica Proposizionale!

4. Implicazione ($\rightarrow$): sostenere che "$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$" è vera significa che non può succedere che $\mathbf{q}$ sia falsa quando $\mathbf{p}$ è vera. Da notare che non si sostiene nulla su cosa ne sia di $\mathbf{q}$ quando $\mathbf{p}$ è falsa. Ad esempio l'affermazione "se c'è il sole allora c'è luce" (che prende in considerazione un mondo senza nuvole...) non è contraddetta dal fatto che, quando non c'è il sole, posso comunque avere luce accendendo lampade. Semplicemente afferma che ogni qualvolta ci sia il sole la luce è garantita o, equivalentemente, che non è possibile che ci sia sole e buio allo stesso tempo.
   È importante, e sarà usato nel seguito, notare che questo corrisponde al fatto, evidente al livello di linguaggio naturale, che $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ è equivalente a $\sim(\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{q})$.

5. Coimplicazione ($\leftrightarrow$): sostenere che "$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$" è vera significa sostenere che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono entrambe vere o entrambe false. Il simbolo viene dal fatto intuitivo che questo è vero se e solo se sono vere le due relazioni $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ e $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$. Ad esempio la proposizione "$x^2 = 4$" è equivalente a "$x = \pm 2$".

Scopo della Logica Proposizionale è capire come combinare le proposizioni tra loro in modo da preservare, passaggio per passaggio, la verità dalle premesse alle conclusioni (si veda a questo proposito il bel libro (Bellissima e Pagli, 1993).

## 2.1 Traduzione dal linguaggio naturale

Condizione necessaria per risolvere indovinelli con la Logica Proposizionale è chiaramente saper tradurre dal linguaggio naturale a quello formale, cioè utilizzando i connettivi. Questo è un punto forte della Logica perché rappresenta un raro punto di incontro tra Matematica e Italiano e andrebbe adeguatamente valorizzato.

Per riuscire a tradurre una frase in linguaggio formale bisogna prima di tutto conoscere bene l'analisi della proposizione e, viceversa, capire bene l'uso dei connettivi aiuta a ricostruire la corretta struttura di una frase.

La prima mossa consiste nel riscrivere la frase eliminando tutte le ellissi semplificative che si fanno di norma nel linguaggio comune, quindi si identificano le proposizioni e si assegna ad ognuna una lettera e infine si combinano tramite i connettivi corrispondenti. Di seguito riportiamo una serie di esempi che copre i casi più semplici.

### 2.1.1 Congiunzione

La frase

*"Pula è un paese ed una parola di quattro lettere"*

si deve prima di tutto riscrivere come

*"Pula è un paese e Pula è una parola di quattro lettere"*.

Quindi si pone

$\mathbf{p} =$ *"Pula è un paese"*, $\mathbf{q} =$ *"Pula è una parola di quattro lettere"*

e la frase finalmente si riscrive formalmente come $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$.

Facciamo notare che nel linguaggio naturale esistono innumerevoli modi diversi di dire la stessa cosa che si distinguono solo per sfumature che danno informazioni accessorie all'ascoltatore ma nulla aggiungono alla struttura logica della frase. Ad esempio le tre frasi *"Mario è uno studente ed un lavoratore"*, *"Mario, che è uno studente, è anche un lavoratore"* e *"Mario non solo è uno studente ma è anche un lavoratore"* dal punto di vista della Logica Proposizionale si traducono tutte come $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ con

$\mathbf{p} =$ *"Mario è uno studente"*, $\mathbf{q} =$ *"Mario è un lavoratore"*.

### 2.1.2 Disgiunzione

Oltre a quanto detto sopra per la congiunzione qui bisogna anche capire quando la congiunzione è inclusiva e quando è esclusiva. Ad esempio una frase del tipo

“*Questi ragazzi hanno la laurea in filosofia o in matematica*”,

rivolta ad un insieme di concorrenti per un posto di ricercatore in Logica, sicuramente va tradotta con $\vee$ perché qualcuno potrebbe avere la laurea in entrambe:
**p** = *“Questi ragazzi hanno la laurea in filosofia”*
**q** = *“Questi ragazzi hanno la laurea in matematica”*
$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ = *“Questi ragazzi hanno la laurea in filosofia o matematica”*

Al contrario, la disgiunzione nella frase

*Si vince o si perde*$''$

’ senz’altro esclusiva me va tradotta come segue:

$$\mathbf{p} = \text{“}\textit{Si vince}\text{”},\ \mathbf{q} = \text{“}\textit{Si perde}\text{”},\ (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \sim (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$$

(cioè o **p** o **q** ma non entrambi). Per evitare di usare un’espressione così lunga per un concetto così semplice spesso in Logica si introduce il simbolo $\veebar$ per la congiunzione esclusiva, cioè $\mathbf{p} \veebar \mathbf{q}$ sta per $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \sim (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$.

### 2.1.3 Implicazione

Il caso dell’implicazione è il più sottile perché nel mondo fisico l’implicazione è necessariamente collegata all’ordine temporale degli eventi: la causa predece sempre l’effetto!

Il fattore temporale invece è assente in frasi che si riferiscono al mondo matematico, che rende l’implicazione più semplice da capire in quel caso.

Ad esempio

*“Sarete promossi* **se** *studierete”*

si traduce così:

$$\mathbf{p} = \text{“}\textit{Studierete}\text{”},\ \mathbf{q} = \text{“}\textit{Sarete promossi}\text{”},$$

$$\mathbf{p} \to \mathbf{q} = \text{“}\textit{Se studierete allora sarete promossi}\text{”}$$

Notate che questa affermazione non esclude la possibilità di essere promossi senza studiare! Un errore logico che si fa spesso inconsciamente è proprio quello di aggiungere l’implicazione nel verso opposto, ottenendo quindi una equivalenza logica dove non sussiste. Come citato in (Bellissima e Pagli, 1993), un errore logico di questo tipo è perfettamente esemplificato nella parabola dei vignaioli (Matteo 20, 1-16): il padrone di una vigna si accorda la mattina presto con dei vignaioli per un danaro al giorno, nel resto della giornata continua a convocare altri vignaioli e a fine giornata dà a tutti un denaro. Quelli assunti per primi si lamentano della cosa ma, in sostanza, il padrone ribatte che stanno commettendo un errore di logica: lui gli ha detto che avrebbe pagato un denaro *se* (non *se e solo se*!) avessero lavorato tutto il giorno nella vigna (e questo patto lo sta rispettando!), non gli ha mai detto che avrebbe pagato di meno altrimenti (implicazione inversa inconsciamente aggiunta dai vignaioli!).

Tornando all'esempio originale, la frase (ben più minacciosa!)

*"Sarete promossi* **solo se** *studierete"*

si traduce, con gli stessi **p** e **q**, come

$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} =$ *"Se sarete stati promossi [allora significherà che] avrete studiato"*

Come si vede in italiano, a causa della successione temporale degli eventi, una traduzione diretta della formula logica non suona molto bene. D'altra parte è possibile rendere la stessa relazione logica *in negativo* come segue:

$\sim\mathbf{p} \rightarrow \sim\mathbf{q} =$ *"Se non studierete non verrete promossi"*

In questo caso la traduzione in italiano suona meglio proprio perché la causa è, come dev'essere, posta prima dell'effetto. Notate infine che questo non esclude la possibilità di venire bocciati pur avendo studiato!

### 2.1.4 Equivalenza Logica

Mettendo insieme le due implicazioni discusse sopra otteniamo

*"Sarete promossi* **se e solo se** *studierete"*

che si traduce, con le stesse definizioni di **p** e **q**, come

$$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}.$$

Notate però che anche qui rimane il problema temporale: sebbene in Logica $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ sia del tutto equivalente a $\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p}$, una traduzione letterale in italiano del secondo suonerebbe come

$\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p} =$ *"[Sarà chiaro che] Avrete studiato se e solo sarete stati promossi"*

ma ovviamente nessuno parlerebbe mai in questo modo!

## 2.2 Il Sistema di Deduzione Naturale

Esiste più di un modello di Logica Proposizionale, introduzioni che li espongono sono disponibili in abbondanza in stampa e in rete. Ad esempio suggeriamo la lettura del libro di Bencivenga (Bencivenga, 1988), della introduzione di Marta Cialdea Mayer (Mayer, 2010, dove tra l'altro vengono discussi alcuni indovinelli logici tratti da (Smullyan, 1981)), del libro di Flavio Previale (Previale, 2008) e degli appunti di Logica Matematica di Giangiacomo Gerla (Gerla, 2011).

In questo articolo utilizziamo il cosiddetto *sistema di deduzione naturale*, proprio perché le sue regole di deduzione ricalcano da vicino quelle del ragionamento naturale e sembra quindi il più adatto ad essere usato per chi si avvicina alla Logica Proposizionale per la prima volta.

Ricordiamo dal paragrafo precedente che ogni teoria matematica è basata su tre ingredienti: le definizioni degli "oggetti" di cui parla la teoria, gli assiomi da cui la teoria parte e le regole di inferenza. Nel caso del sistema naturale gli oggetti sono: le lettere minuscole dell'alfabeto latino **p**,**q**,..., che rappresentano proposizioni elementari o loro combinazioni tramite gli operatori che seguono; l'operatore unario $\sim$ (negazione), e gli operatori binari $\wedge$ (congiunzione), $\vee$ (disgiunzione), $\to$ (implicazione) e $\leftrightarrow$ (equivalenza logica); le parentesi tonde, che sono giusto un simbolo tipografico ausiliare da usare quando l'ordine delle operazioni è importante o anche solo per migliorare la leggibilità della formula.

Di assiomi, peculiarmente, in questa teoria non ce ne sono. Anche se inusuale, questo fatto non deve sorprendere: anche giochi banali come il tris non hanno una posizione iniziale, per compensare hanno regole che permettono di posizionare "pedine" (cerchi e croci) sulla mappa, e questo è esattamente quel che capita con le regole di inferenza del sistema naturale.

Le regole sono dieci, due per operatore (una per introdurlo ed una per eliminarlo), e corrispondono esattamente all'uso che si fa nella lingua italiana della negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione ed equivalenza:

(I$\sim$) **introduzione della negazione:** se, assumendo **p**, riusciamo a dimostrare sia **q** che $\sim\mathbf{q}$, allora $\sim\mathbf{p}$;
(cioè, per brevità, se assumiamo che la proposizione rappresentata da **p** sia vera e, grazie a questa assunzione, riusciamo a dimostrare sia una certa proposizione **q** che la sua opposta $\sim\mathbf{q}$, allora ne concludiamo che **p** dev'essere falsa. Dunque abbiamo così dimostrato che ad essere vera è $\sim\mathbf{p}$)

(E$\sim$) **eliminazione della negazione:** se $\sim(\sim\mathbf{p})$ allora **p**;

(I$\wedge$) **introduzione della congiunzione:** se **p** e **q** allora $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}\wedge\mathbf{p}$;

(E$\wedge$) **eliminazione della congiunzione:** se $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$ allora sia **p** che **q**;

(I$\vee$) **introduzione della disgiunzione:** se **p** allora $\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}\vee\mathbf{p}$ (qualunque sia **q**!);

(E$\vee$) **eliminazione della disgiunzione:** se $\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$ e sia da **p** che da **q** discende **r**, allora **r**;

(I$\leftrightarrow$) **introduzione della equivalenza:** se $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}\to\mathbf{p}$ allora $\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}$;

(E$\leftrightarrow$) **eliminazione della equivalenza:** se $\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}$ allora sia $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ che $\mathbf{q}\to\mathbf{p}$;

(I$\to$) **introduzione dell'implicazione:** se assumendo **p** si riesce a dimostrare **q**, allora $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$;

(E$\to$) **eliminazione dell'implicazione:** se **p** e $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ allora **q**.

Due di queste dieci regole, (I$\sim$) e (I$\to$), permettono di dimostrare teoremi come conseguenza dell'assunzione della verità di una proposizione. In assenza di assiomi chiaramente è da queste due regole che vengono dimostrati i primi teoremi.

Chiarifichiamo l'uso di (I$\sim$) e (I$\rightarrow$) e delle altre regole con alcuni esempi. Si noterà che i passi delle dimostrazioni corrispondono esattamente a quelli che faremmo nel ragionamento *naturale* per dedurne la verità.

**Esempio 1.** *Cominciamo con il teorema*

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \vee \mathbf{q},$$

*che afferma la seguente ovvietà: se una affermazione* $\mathbf{p}$ *è corretta allora è corretto anche affermare la correttezza di "*$\mathbf{p}$ *o* $\mathbf{q}$*" qualunque sia* $\mathbf{q}$.

*Avendo in mente la regola (I$\rightarrow$), assumiamo che* $\mathbf{p}$ *sia vera. Allora, per la regola (I$\vee$), è vero anche che* $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$. *Dall'assunzione di* $\mathbf{p}$ *siamo dunque riusciti a dimostrare* $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$. *La regola (I$\rightarrow$) allora ci fa concludere immediatamente che* $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ *è un teorema della Logica Proposizionale.*

**Esempio 2.** *Ora dimostriamo una formula più interessante:*

$$\sim(\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{p}),$$

*cioè non è possibile che una affermazione sia contemporaneamente vera e falsa.*

*Per dimostrarlo cominciamo con l'assumere il contrario, cioè che* $\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{p}$. *Allora, per la regola (E$\wedge$), deduciamo che son veri sia* $\mathbf{p}$ *che* $\sim\mathbf{p}$, *cioè sia una cosa che il suo opposto. Per la regola (I$\sim$) allora otteniamo immediatamente che* $\sim(\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{p})$ *è un teorema della Logica Proposizionale.*

**Esempio 3.** *È ben noto che tra i cinque operatori della Logica Proposizionale sussistono delle relazioni, tanto che ci si potrebbe limitare all'uso di solo due di essi (ad esempio la negazione e la congiunzione) ed esprimere i rimanenti tre in funzione di questi due. Qui proviamo per esercizio che* $\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ *è equivalente a* $\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}$, *cioè che dire che due affermazioni non sono entrambe vere è equivalente a dire che almeno una delle due è falsa. Formalmente questo si scrive come segue:*

$$(\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \leftrightarrow (\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}).$$

*Chiaramente, grazie alla regola (I$\leftrightarrow$), si tratta di provare separatamente*

$$(\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \rightarrow (\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q})$$

*e*

$$(\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}) \rightarrow (\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})).$$

*Intuitivamente è chiaro che si tratta in entrambi i casi di usare, in un modo o in un altro, la regola (I$\rightarrow$) per introdurre l'implicazione.*

*Supponiamo dunque dapprima che sia vera* $\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$. *Allora, sotto questa condizione, se è vera* $\mathbf{p}$ *dev'essere falsa* $\mathbf{q}$ *perché altrimenti potremmo dedurre* $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, *contrariamente all'ipotesi; quindi* $\sim\mathbf{q}$ *e, per la regola (I$\vee$), possiamo affermare che* $\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}$. *D'altra parte se* $\mathbf{p}$ *è falsa allora, di nuovo per la (I$\vee$), possiamo subito affermare che* $\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}$. *Dunque abbiamo dimostrato che dall'assunzione di* $(\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))$ *si può dedurre* $\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q}$. *Allora applicando la (I$\rightarrow$) otteniamo che* $(\sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})) \rightarrow (\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{q})$.

*Supponiamo ora che sia vera* $\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q}$. *Assumiamo dapprima che sia vera* $\sim\mathbf{p}$ *e, per assurdo, che sia vera* $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$. *Allora, per la (E$\wedge$), sarebbero contemporaneamente vere* $\sim\mathbf{p}$, $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$, *e quindi, per la (I$\sim$), da* $\sim\mathbf{p}$ *discende che* $(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))$. *Se ora assumiamo che* $\sim\mathbf{q}$, *un ragionamento analogo ci porta nuovamente a dimostrare che* $(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))$. *Allora la regola (E$\vee$) ci fa concludere immediatamente che dall'assunzione* $\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q}$ *discende* $\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})$. *Per la regola (I$\rightarrow$) quindi deduciamo finalmente che* $(\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q})\rightarrow\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})$.

*Dunque entrambe le implicazioni sono vere e quindi la regola (I$\leftrightarrow$) ci permette di concludere l'equivalenza logica tra* $\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q}$ *e* $\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})$.

Una importante peculiarità accomuna i tre teoremi di sopra: la loro correttezza non dipende dal valore di verità delle proposizioni che compaiono nella loro espressione!

Questo non è una caso: si può dimostrare che i teoremi del sistema di deduzione naturale, e quindi della Logica Proposizionale, sono tutte e sole le tautologie esprimibili in questo linguaggio[5].

### 2.3 Tautologie

Con l'aumentare dei connettivi presenti in una formula le tautologie diventano sempre meno evidenti. Un esempio di tautologia non banale da riconoscere è data dal problema del Fanti di Cuori (Sez. 4).

Qui di seguito riportiamo una serie di tautologie, alcune delle quali appariranno negli indovinelli della prossima sezione. È un interessante esercizio dimostrarle con le regole della deduzione naturale.

1. $\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{p}$
   cioè o $\mathbf{p}$ è vera o è falsa (tertium non datur).

2. $(\mathbf{p}\wedge\sim\mathbf{p})\rightarrow\mathbf{q}$
   cioè da una premessa falsa (perché non può essere che siano vere contemporaneamente $\mathbf{p}$ e $\sim\mathbf{p}$) si può dimostrare qualunque cosa (ex falso quodlibet).

3. $(\mathbf{p}\wedge(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}))\leftrightarrow((\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\wedge\mathbf{r})$
   cioè affermare la verità sia di $\mathbf{p}$ che della coppia $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ equivale ad affermare la verità sia della coppia $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ che di $\mathbf{r}$ (associatività della congiunzione).
   Questo significa che qui le parentesi non servono e quindi si può semplicemente scrivere $\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}\wedge\mathbf{r}$.
   Lo stesso vale per i connettivi $\vee$ e $\leftrightarrow$ mentre affermare che $\mathbf{p}\rightarrow(\mathbf{q}\rightarrow\mathbf{r})$ è diverso da affermare che $(\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{q})\rightarrow\mathbf{r}$ e quindi per questo connettivo non è possibile eliminare le parentesi.

4. $(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))\leftrightarrow(\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q})$
   cioè sostenere che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ non sono entrambe vere è equivalente ad affermare che almeno una delle due è falsa.

5. $(\sim(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}))\leftrightarrow(\sim\mathbf{p}\wedge\sim\mathbf{q})$
   similmente, sostenere che non è possibile che $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$ siano vere equivale ad affermare che sono entrambe false.

[5] Ricordiamo che questa teoria non è "abbastanza ricca" e quindi non soddisfa il teorema di incompletezza di Gödel. È per questo che è possibile caratterizzare in modo così semplice i teoremi della teoria!

6. $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{p} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})$
   cioè dicendo che **p** e **q** hanno lo stesso valore di verità stiamo contemporaneamente asserendo che questo vale anche per le loro negazioni e viceversa.

7. $(\sim (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q})) \leftrightarrow (\sim \mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q})$
   cioè sostenere che non è vero che **p** e **q** hanno lo stesso valore di verità equivale ad affermare che una ha il valore di verità opposto all'altra.

8. $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow (\sim \mathbf{q} \rightarrow \sim \mathbf{p})$
   cioè sostenere che da **p** segue **q** equivale ad affermare che dalla falsità di **q** discende quella di **p**.

9. $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r})$
   questa e' la forma astratta del sillogismo di tipo BARBARA[6] (dove cioè sia le due premesse che la conclusione sono universali affermative): "se tutti i P sono Q e tutti i Q sono R allora tutti i P sono R"

### 2.4 Le Tavole di Verità e la Funzione di Verità

La caraterizzazione dei teoremi della Logica Proposizionale come tautologie conferisce una particolare utlità a due metodi "meccanici" per la determinazione del valore di verità di una formula della Logica Proposizionale in funzione di quelli delle proposizioni elementari che le compongono.

Il primo, ben noto, è quello delle tavole di verità: ad ogni operatore viene associata una tavola che mostra nelle colonne di sinistra i valori delle proposizioni che appaiono nell'espressione elementare contenente quell'operatore e nella colonna di destra il corrispondente valore di verità dell'espressione.

Sotto riportiamo le tavole di verità dei cinque connettivi:

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{q}$ | $\sim \mathbf{p}$ | $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ | $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ | $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ | $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | F |
| F | F | V | F | F | V | V |

Il secondo metodo è quello della funzione di verità. Si indica con $v$ la funzione a valori in $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ che associa ad una espressione della Logica Proposizionale il valore di 1 se l'espressione è vera e 0 se è falsa.

Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{Z}_2$ si puó pensare come "l'insieme delle mezz'ore". Un orologio senza lancette delle ore che segni solo le mezz'ore ha due stati: l'ora esatta, che rappresentiamo con "0", e la mezza, che rappresentiamo con "1". Dato che dopo due

[6] http://it.wikipedia.org/wiki/Sillogismo

mezz'ore l'orologio torna allo stato di partenza, abbiamo che la somma in $\mathbb{Z}_2$ soddisfa le seguenti proprietá:

$$0+0=0, \quad 0+1=1+0=1, \quad 1+1=0.$$

Queste relazioni sono reminiscenti del fatto che "pari+pari=dispari+dispari=pari" mentre "pari+dispari=dispari+pari=dispari", tanto che $\mathbb{Z}_2$ può anche essere considerato come l'algebra del "pari/dispari".

Tornando alla Logica, tramite $v$ possiamo calcolarci il valore di verità di espressioni complesse una volta che sappiamo come agisce su ogni singolo operatore:

1. $v(\sim\mathbf{p}) = v(\mathbf{p})+1$.
   Infatti se $\mathbf{p}$ è falsa allora $v(\mathbf{p}) = 0$ e quindi $v(\mathbf{p})+1 = 1 = v(\sim\mathbf{p})$.
   Se $\mathbf{p}$ è vera allora $v(\mathbf{p}) = 1$ e quindi ancora $v(\mathbf{p})+1 = 1+1 = 0 = v(\sim\mathbf{p})$.
2. $v(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) = \min(v(\mathbf{p}), v(\mathbf{q}))$.
   Qui usiamo il *minimo* tra $v(\mathbf{p})$ e $v(\mathbf{q})$ perché questa espressione deve dare 1 solo quando $v(\mathbf{p}) = v(\mathbf{q}) = 1$.
3. $v(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}) = \max(v(\mathbf{p}), v(\mathbf{q}))$.
   Qui usiamo il *massimo* tra $v(\mathbf{p})$ e $v(\mathbf{q})$ perché questa espressione deve dare 1 quando almeno uno dei due tra $v(\mathbf{p})$ e $v(\mathbf{q})$ vale 1.
4. $v(\mathbf{p}\to\mathbf{q}) = \max(1+v(\mathbf{p}), v(\mathbf{q}))$.
   Questa espressione viene dal fatto che l'espressione $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ è equivalente a $\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$. Si verifica subito la correttezza dell'espressione dal fatto che dà 1 per $v(\mathbf{p}) = 0$ a prescindere da $v(\mathbf{q})$ (ex falso quodlibet) mentre per $v(\mathbf{p}) = 1$ dà 1 solo per $v(\mathbf{q}) = 1$.
   **NOTA:** $\mathbf{p}\to\mathbf{q}$ se e solo se $v(\mathbf{q}) \geq v(\mathbf{p})$!
5. $v(\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}) = 1+v(\mathbf{p})+v(\mathbf{q})$.
   Questa espressione deriva dal fatto che, in $\mathbb{Z}_2$, se $v(\mathbf{p}) = v(\mathbf{q})$ allora $v(\mathbf{p})+v(\mathbf{q}) = 0$ ("pari+pari=dispari+dispari=pari") e quindi otteniamo 1 se e solo se $v(\mathbf{p}) = v(\mathbf{q})$.
   **NOTA:** $\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}$ se e solo se $v(\mathbf{q}) = v(\mathbf{p})$!

Come esempio verifichiamo con queste due regole i teoremi che abbiamo dimostrato con la deduzione naturale:

**Esempio 4.** *La tavola di verità di* $\mathbf{p}\to(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})$ *è la seguente:*

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{q}$ | $\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$ | $\mathbf{p}\to(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})$ |
|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* | *V* |
| *V* | *F* | *V* | *V* |
| *F* | *V* | *V* | *V* |
| *F* | *F* | *F* | *V* |

*In termini della funzione* $v$ *è sufficiente verificare che*

$$\max(v(\mathbf{p}), v(\mathbf{q})) = v(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}) \geq v(\mathbf{p})$$

*ma questo discende subito dalla definizione di massimo tra due numeri.*

**Esempio 5.** *La tavola di verità di* $\sim(\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{p})$ *è la seguente:*

| $\mathbf{p}$ | $\sim\mathbf{p}$ | $\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}$ | $\sim(\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{p})$ |
|---|---|---|---|
| *V* | *F* | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *F* | *V* |

*Utlizzando la funzione v troviamo che*

$$v(\sim(\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{p})) = 1+v(\sim\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}) = 1+\min(1+v(\mathbf{p}),v(\mathbf{p})) = 1+0 = 1$$

*perché uno dei due tra* $1+v(\mathbf{p})$ *e* $v(\mathbf{p})$ *vale 0.*

**Esempio 6.** *La tavola di verità di* $(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})) \leftrightarrow (\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q})$ *è la seguente:*

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{q}$ | $\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})$ | $\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q}$ | $(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})) \leftrightarrow (\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q})$ |
|---|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *F* | *F* | *V* |
| *V* | *F* | *V* | *V* | *V* |
| *F* | *V* | *V* | *V* | *V* |
| *F* | *F* | *V* | *V* | *V* |

*In termini della funzione v è sufficiente verificare che sia un'identità la formula*

$$v(\sim(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})) = v(\sim\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q}),$$

*cioé che lo sia la*

$$1+\min(v(\mathbf{p}),v(\mathbf{q})) = \max(1+v(\mathbf{p}),1+v(\mathbf{q}))$$

*Questo è provato dal fatto che, quando* $\min(v(\mathbf{p}),v(\mathbf{q})) = 0$ *allora almeno uno dei due vale 0 e quindi* $\max(1+v(\mathbf{p}),1+v(\mathbf{q})) = 1$*; quando invece* $\min(v(\mathbf{p}),v(\mathbf{q})) = 1$ *allora entrambi valgono 1 e quindi* $\max(1+v(\mathbf{p}),1+v(\mathbf{q})) = 0$.

Come si vedrà in seguito, questi due metodi funzionano molto bene per espressioni contenenti pochi operatori ma diventano velocemente inutilizzabili nel caso di espressioni complicate.

## 3. GLI INDOVINELLI DI SMULLYAN

Gli indovinelli basati sulla logica sono un passatempo molto diffuso ma non tutti si prestano ad una traduzione semplice e appropriata in termini di Logica Proposizionale. In questo articolo presentiamo e commentiamo alcuni indovinelli pubblicati da R. Smullyan, logico matematico allievo di A. Church, nel libro "Alice nel paese degli indovinelli" (Smullyan, 1982).

In alcune serie di questi indovinelli, ambientati nel mondo di "Alice nel paese delle meraviglie" di L. Carroll (anch'esso un logico matematico!), Smullyan postula che i personaggi siano o savi o matti e che, corrispondentemente, dicano sempre la verità o mentano sempre. La Duchessa, che invece dice sempre la verità, passeggia con Alice per il paese delle meraviglie e, incontrando i vari personaggi del libro, riporta alcune loro dichiarazioni sulla sanità mentale propria e altrui e invita Alice a dedurne quel che si può sullo stato mentale dei personaggi.

Questi indovinelli si prestano particolarmente bene ad una soluzione tramite la Logica Proposizionale perché ammettono una traduzione "compatta" (cioé con pochi connettivi) e seguono una successione crescente di difficoltà ottimamente congegnata. Nel seguito di questa sezione risolviamo esplicitamente alcuni di questi indovinelli utilizzando sia il sistema naturale che le tavole di verità e la funzione di verità.

## 3.1 Il Bruco e la Lucertola

In questo primo indovinello Alice e la Duchessa incontrano il Bruco e la Lucertola. A proposito della loro salute mentale la Duchessa dice ad Alice che il Bruco crede che lui e la Lucertola siano *entrambi* matti e sostiene, con questo, di averle fornito abbastanza elementi per capire chi dei due è matto e chi savio. In questo caso l'indovinello è abbastanza semplice da venire risolto facilmente a mente, così come non c'è bisogno di utilizzare carta e penna per risolvere l'equazione $2x+1=3$. Ciononostante è un interessante esercizio "di riscaldamento" vedere come risolverlo più formalmente.

La prima mossa naturalmente consiste nel tradurre il testo in formule. Poniamo innanzi tutto

$$\mathbf{b} = \text{“Il Bruco è savio”},\ \mathbf{l} = \text{“La Lucertola è savia”}$$

Il Bruco sostiene che sono entrambi matti, cioè che $\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}$. D'altra parte non possiamo prendere questa formula come punto di partenza perché non sappiamo se questo è vero o falso, sappiamo solo che questo è ciò che sostiene il Bruco. Dato però che sappiamo che chi è savio dice la verità e chi è matto mente, allora il valore di verità di ciò che dice il Bruco è legato a doppio filo al suo stato mentale, cioè:

$$\mathbf{b} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}) = \text{“Il Bruco ha detto che lui e la Lucertola sono entrambi matti”}$$

Che questa frase sia vera lo sappiamo perché l'ha detto la Duchessa e, come ci dice Smullyan, la Duchessa non mente mai!

Dunque il problema "formalmente" è questo: assumendo la verità di $\mathbf{b} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l})$ cosa possiamo dedurre sulla verità di **b** e **l**?

Cominciamo dal punto di vista delle tavole di verità:

| $\mathbf{b}$ | $\mathbf{l}$ | $\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}$ | $\mathbf{b} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l})$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | F |
| V | F | F | F |
| F | V | F | V |
| F | F | V | F |

Dato che sappiamo che $\mathbf{b} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l})$ è vera ne deduciamo che dobbiamo essere nel caso della terza riga, cioè il Bruco è matto e la lucertola è savia.

Risolviamo ora il problema con la funzione di verità. Abbiamo che

$$v(\mathbf{b}) = v(\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}) = \min(1+v(\mathbf{b}), 1+v(\mathbf{l}))$$

per cui

$$v(\mathbf{b}) \leq 1+v(\mathbf{b})$$

ma questa relazione può sussistere solo per $v(\mathbf{b}) = 0$! Sostituendo vediamo che

$$0 = \min(1, 1+v(\mathbf{l}))\,,$$

cioè $v(\mathbf{l}) = 0$ e quindi la Lucertola è savia.

Infine utilizziamo le regole della deduzione naturale. Usiamo dapprima la (E$\leftrightarrow$) per ottenere che $\mathbf{b} \to (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l})$. Per la (E$\wedge$) abbiamo in particolare che $\mathbf{b} \to\sim\mathbf{b}$ da cui, grazie alla (I$\sim$), otteniamo che $\sim\mathbf{b}$. Dunque il Bruco è matto. Ora usiamo l'implicazione nella direzione inversa, cioè $(\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}) \to \mathbf{b}$, e, avendo in mente la (I$\sim$), assumiamo che sia $\sim\mathbf{l}$. Allora, dato che sappiamo gia' che $\sim\mathbf{b}$, sarebbe vero anche $\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l}$ per la (I$\wedge$) e quindi ne conseguirebbe $\mathbf{b}$, in contraddizione con $\sim\mathbf{b}$. Dunque, per (I$\sim$), dev'essere $\sim(\sim\mathbf{l})$ e quindi, per (E$\sim$), $\mathbf{l}$ è vera, cioè la Lucertola è savia.

Facciamo notare che questa discussione è sostanzialmente una dimostrazione del seguente teorema di Logica Proposizionale:

$$(\mathbf{b} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\wedge\sim\mathbf{l})) \to (\sim\mathbf{b}\wedge\mathbf{l}).$$

### 3.2 La Cuoca e il Gatto

Subito dopo Alice e la Duchessa incontrano la Cuoca della Duchessa ed il Gatto del Cheshire. Stavolta chi parla (la Cuoca) sostiene che almeno uno tra i due sia matto.

Come prima poniamo innanzi tutto

$$\mathbf{c} = \text{“La Cuoca è savia”},\ \mathbf{l} = \text{“Il Gatto è savio”}$$

La formula stavolta è:

$$\mathbf{c} \leftrightarrow (\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g})$$

Rispetto alla precedente l'unico cambiamento è nell'operatore, da $\wedge$ a $\vee$. Vedremo che in questo modo otteniamo esattamente il risultato opposto.

La tavola di verità è

| $\mathbf{c}$ | $\mathbf{g}$ | $\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g}$ | $\mathbf{c}\leftrightarrow(\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g})$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | F |
| V | F | V | V |
| F | V | V | F |
| F | F | V | F |

L'unica possibilità è che la Cuoca sia savia e il Gatto (non poteva essere diversamente!) sia matto.

Veniamo alla funzione di verità. Stavolta

$$v(\mathbf{c}) = v(\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g}) = \max(1+v(\mathbf{c}), 1+v(\mathbf{g}))$$

per cui

$$v(\mathbf{c}) \geq 1+v(\mathbf{c})$$

ma questo può accadere solo per $v(\mathbf{c}) = 1$! Quindi

$$1 = \max(0, 1+v(\mathbf{g}))$$

per cui dev'essere $v(\mathbf{g}) = 0$, cioè il gatto è matto.

Infine utilizziamo le regole della deduzione naturale. Come sopra usiamo dapprima la (E$\leftrightarrow$) ma stavolta partiamo dalla $(\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g}) \to \mathbf{c}$. Avendo in mente la (I$\sim$), assumiamo che $\sim\mathbf{c}$. Allora per la (I$\vee$) abbiamo anche che $\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g}$ e quindi, per la (E$\to$), che $\mathbf{c}$. Dunque l'ipotesi $\sim\mathbf{c}$ porta ad una contraddizione e, per la (I$\sim$), dev'essere $\sim(\sim\mathbf{c})$ e quindi, per la (E$\sim$), abbiamo che $\mathbf{c}$, la cuoca è savia!

Applicando questo risultato a $\mathbf{c} \to (\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g})$ abbiamo, dalla (E$\to$), che $\sim\mathbf{c}\vee\sim\mathbf{g}$. Avendo in mano una disgiunzione non possiamo che usare la (E$\vee$), cioè vogliamo mostrare che sia dall'ipotesi $\sim\mathbf{c}$ che da $\sim\mathbf{g}$ viene fuori che $\sim\mathbf{g}$ e quindi dedurne che dev'essere $\sim\mathbf{g}$. Che $\sim\mathbf{g}$ segua da se stessa è ovvio, supponiamo ora invece che $\sim\mathbf{c}$ e assumiamo che sia vero $\mathbf{g}$. A questo punto ci ricordiamo che tra le assunzioni non c'è solo $\sim\mathbf{c}$ ma anche, più a monte, $\mathbf{c}$ e dunque abbiamo una contraddizione (indipendente dall'assunzione che fosse vero $\mathbf{g}$ ma pur sempre una contraddizione) e quindi, in base alla (I$\sim$), deduciamo che dev'essere $\sim\mathbf{g}$. Dunque per la (E$\vee$) possiamo dedurre che $\sim\mathbf{g}$, cioè il gatto è matto.

Indichiamo brevemente una soluzione alternativa interessante. Utilizzando il fatto che $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ è equivalente a $\sim\mathbf{p} \leftrightarrow\sim\mathbf{q}$ e che $\sim(\mathbf{p}\vee\sim\mathbf{q})$ è equivalente a $\sim\mathbf{p}\wedge\sim\mathbf{q}$ possiamo riscrivere l'indovinello come $\sim\mathbf{c} \leftrightarrow (\mathbf{c}\wedge\mathbf{g})$. Usando la notazione $\mathbf{c}'$ per $\sim\mathbf{c}$ e $\mathbf{g}'$ per $\sim\mathbf{g}$ otteniamo finalmente $\mathbf{c}' \leftrightarrow (\sim\mathbf{c}'\wedge\sim\mathbf{g}')$, che è la stessa formula che abbiamo trovato nell'indovinello del Bruco e della Lucertola e quindi è già risolto! In particolare questo spiega subito perché le soluzioni sono una l'opposto dell'altra.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema di Logica Proposizionale:

$$(\mathbf{c} \leftrightarrow (\sim\mathbf{b}\vee\sim\mathbf{l})) \to (\mathbf{c}\wedge\sim\mathbf{g}).$$

### 3.3 Il Domestico-Pesce e il Domestico-Rana

Le espressioni dei due indovinelli precedenti sono state sufficienti a definire il valore di verità delle proposizioni che le componevano. Ovviamente non è sempre così : ad esempio da $\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$ ricaviamo che una delle due proposizioni è vera ma non abbiamo elementi per determinare quale delle due. Il seguente indovinello porta ad una formula che invece determina in modo univoco il valore di verità di una delle due ma non dice nulla dell'altra.

Stavolta la Duchessa e Alice incontrano il Domestico-Pesce e il Domestico-Rana. La Duchessa spiega ad Alice che il Domestico-Pesce crede che lui e il Domestico-Rana siano o entrambi matti o entrambi savi – cioè che siano "logicamente equivalenti". Poniamo, come al solito,

$$\mathbf{p} = \text{"Il Domestico-Pesce è savio"},\ \mathbf{r} = \text{"Il Domestico-Rana è savio"}$$

La formula stavolta è:

$$\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r}).$$

Ancora una volta la differenza con gli altri due indovinelli sta soltanto nel secondo connettivo.

Vediamo la tavole di verità:

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{r}$ | $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r}$ | $\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r})$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | F | V |
| F | F | V | F |

Stavolta ci sono due casi in cui $\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r})$ è vera: nel primo i domestici sono entrambi savi, nel secondo il Pesce è matto e la Rana è savia. Dunque possiamo concludere che la Rana è senz'altro savia mentre non abbiamo abbastanza elementi a proposito del Pesce.

Veniamo alla funzione di verità. Abbiamo che

$$v(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r}) = 1 + v(\mathbf{p}) + v(\mathbf{r}).$$

Sottraendo a entrambi i membri $v(\mathbf{p})$ troviamo che

$$0 = 1 + v(\mathbf{r})$$

da cui $v(\mathbf{r}) = 1$ (da notare che, in $\mathbb{Z}_2$, $-1 = +1$ perché entrambi, sommati a 1, danno 0!). Dato che $v(\mathbf{p})$ compare nella stessa misura nel termine di sinistra ed in quello di destra non c'è modo di determinarlo.

Veniamo infine al sistema di deduzione naturale. Utilizzando l'equivalenza logica tra $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow \mathbf{r}$ e $\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{r})$, valida per qualunque $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ed $\mathbf{r}$, otteniamo che $\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r})$ equivale a $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{r}$. Ovviamente $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}$ è sempre vera e dunque $\mathbf{r}$ è vera, cioè la rana è savia.

Stavolta abbiamo dimostrato il seguente teorema:

$$(\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r})) \rightarrow \mathbf{r}.$$

### 3.4 Il Re e la Regina di Cuori

Ora veniamo ad un indovinello che non è facile risolvere a mente per via dei molti livelli di ricorsione. La Duchessa confida ad Alice che la Regina di Cuori crede che il Re sia convinto che lei pensi che lui creda che lei sia matta. Risolvere questo indovinello a mente è un pò come risolvere a mente un sistema di tre equazioni in tre incognite – non impossibile ma macchinoso. Uno qualunque dei tre metodi usati in questo articolo risolve il problema in fretta senza grandi difficoltà.

Poniamo, come al solito,

$$\mathbf{k} = \text{“Il Re è savio”},\ \mathbf{q} = \text{“La Regina è savia”}.$$

La formula risulta la seguente:

$$\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}))).$$

La tavola di verità è già piuttosto ingombrante e noiosa da compilare:

| $\mathbf{k}$ | $\mathbf{q}$ | $\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}$ | $\mathbf{r} = \mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})$ | $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{r}$ | $\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{r})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | F |
| V | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | F | F |
| F | F | F | V | F | V |

Dunque la regina è matta ma del re non si può dir nulla, similmente a quello che succede nell'indovinello precedente.

Veniamo alla funzione di verità. Abbiamo che

$$v(\mathbf{q}) = v(\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}))).$$

Utilizzando ripetutamente la relazione $v(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) = 1 + v(\mathbf{p}) + v(\mathbf{q})$ otteniamo che

$$v(\mathbf{q}) = 1 + v(\mathbf{k}) + v(\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})) = v(\mathbf{k}) + v(\mathbf{q}) + v(\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}) =$$

$$= 1 + 2v(\mathbf{k}) + v(\mathbf{q}) + v(\sim \mathbf{q}) = 2 + 2v(\mathbf{k}) + 2v(\mathbf{q}) = 0$$

(perché, in $\mathbb{Z}_2$, $2 = 1 + 1 = 0$), cioè la regina è matta.

Infine utilizziamo il sistema naturale. Come nell'indovinello precedente utilizziamo l'equivalenza logica tra $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \leftrightarrow \mathbf{r}$ e $\mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{r})$ e in più la simmetria dell'equivalenza, cioè che $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q})$ è lo stesso che dire $(\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{p})$. I passaggi sono i seguenti:

1. $\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})))$
2. $\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow (\sim \mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{k})))$
3. $\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow ((\mathbf{q} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}) \leftrightarrow \mathbf{k}))$
4. $\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})))$
5. $\mathbf{q} \leftrightarrow ((\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}) \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow \sim \mathbf{q}))$

Dunque è come se la Regina fosse convinta che una tautologia $(\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k})$ sia equivalente ad una contraddizione $(\mathbf{q} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})$. La Regina quindi sta affermando una falsità ed non può che essere matta.

In breve, abbiamo dimostrato il seguente teorema:

$$(\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow (\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{k} \leftrightarrow \sim \mathbf{q})))) \to \mathbf{q}.$$

## 4. IL FANTE DI CUORI

L'ultimo indovinello che presentiamo ha un gran numero di variabili. Da una parte ribadisce la difficoltà di risolvere indovinelli complessi senza un adeguato formalismo e dall'altra mostra i limiti del metodo delle tavole di verità e dei valori di verità.

La Duchessa, parlando dei giardinieri della Regina di Cuori (le carte di Cuori da Uno a Sette più il Fante), riferisce le seguenti dichiarazioni:

(a) Tre crede che Uno sia matto.

(b) Quattro crede che Tre e Due non siano entrambi matti.

(c) Cinque crede che Uno e Quattro siano entrambi matti o entrambi savi.

(d) Sei crede che Uno e Due siano entrambi savi.

(e) Sette crede che Cinque sia matto.

(f) Il Fante crede che Sei e Sette non siano entrambi matti.

La domanda è: cosa si può dire del Fante?

È estremamente difficile risolvere questo problema a mente per il gran numero di informazioni da far quadrare. Le tavole di verità non ci aiutano granché a meno di non utilizzare un calcolatore perché la corrispondente tabella avrebbe $2^8 = 256$ righe. Anche la funzione di verità non aiuta molto perché le funzioni max e min si annidano una dentro l'altra e capire il loro valore richiede, nuovamente, la presa in considerazione di un gran numero di combinazioni. Sotto mostriamo invece che il metodo naturale non diventa molto più complicato che negli esempi precedenti.

Per tradurre in formule il problema poniamo

$$1 = \text{“Uno è savio”}$$

e similmente per gli altri numeri e per il Fante. Otteniamo il seguente sistema:

(a) $3 \leftrightarrow \sim 1$

(b) $4 \leftrightarrow \sim(\sim 3 \wedge \sim 2)$

(c) $5 \leftrightarrow (1 \wedge 4)$

(d) $6 \leftrightarrow (1 \wedge 2)$

(e) $7 \leftrightarrow \sim 5$

(f) $F \leftrightarrow \sim(\sim 6 \wedge \sim 7)$

Prima di tutto utilizziamo l'equivalenza tra $\sim(\sim \mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q})$ e $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ per semplificare (b) e (f). Poi, partendo dall'ultima e sostituendo come in un sistema numerico, otteniamo le identità seguenti:

1. $F \leftrightarrow (6 \vee 7)$

2. $F \leftrightarrow ((1 \vee 2) \wedge \sim 5)$
3. $F \leftrightarrow ((1 \vee 2) \wedge \sim (1 \leftrightarrow 4))$
4. $F \leftrightarrow ((1 \vee 2) \wedge (\sim 1 \leftrightarrow 4))$
5. $F \leftrightarrow ((1 \vee 2) \wedge (\sim 1 \leftrightarrow (3 \vee 2)))$
6. $F \leftrightarrow ((1 \vee 2) \wedge (\sim 1 \leftrightarrow (\sim 1 \vee 2)))$

Ora abbiamo $F$ in funzione di soltanto 1 e 2, che peraltro sono incognite perché Uno e Due non si sono pronunciati! Chiaramente il problema è risolubile solo se l'espressione $(1 \vee 2) \wedge (\sim 1 \leftrightarrow (\sim 1 \vee 2))$ non dipende da 1 e 2, cioè se si tratta di una tautologia o di una contraddizione.

Per scoprire se questo è il caso possiamo, ora sì, usare le tavole di verità oppure fare il seguente ragionamento. L'espressione $\sim 1 \leftrightarrow (\sim 1 \vee 2)$ equivale alle due implicazioni $\sim 1 \rightarrow (\sim 1 \vee 2)$ e $(\sim 1 \vee 2) \rightarrow \sim 1$. La prima implicazione è una tautologia e quindi non gioca nessun ruolo. È facile vedere che la seconda equivale a $2 \rightarrow \sim 1$ che, a sua volta, equivale a $\sim (2 \wedge 1)$. Quindi $F$ è equivalente ad una tautologia, cioè il Fante è sano!

È chiaro da questo esempio la superiorità di una dimostrazione al posto di una verifica meccanica fatta con tavole di verità o la funzione di verità. Al contrario di questi ultimi due metodi, la complessità di una dimostrazione non necessariamente cresce con il numero delle condizioni del problema.

Notiamo infine che l'espressione del teorema che abbiamo dimostrato stavolta è piuttosto lunga:

$$((3 \leftrightarrow \sim 1) \wedge (4 \leftrightarrow \sim (\sim 3 \wedge \sim 2)) \wedge (5 \leftrightarrow (1 \wedge 4)) \wedge (6 \leftrightarrow (1 \wedge 2)) \wedge (7 \leftrightarrow \sim 5) \wedge (F \leftrightarrow \sim (\sim 6 \wedge \sim 7))) \rightarrow F$$

## CONCLUSIONI

Questo articolo mostra che l'insegnamento della Logica nelle scuole ha potenzialmente tre importanti conseguenze: 1. fungere da forte punto di contatto tra Matematica e materie non scientifiche, in particolare con l'Italiano; 2. rendere chiaro agli studenti che la Matematica non è (solo) la "scienza dei numeri"; 3. fornire un'occasione concreta per mostrare agli studenti come funziona la matematica e per farli "giocare" con assiomi e regole di inferenza di una teoria relativamente semplice come la Logica Proposizionale.

Nonostante questi indubbi punti di forza l'insegnamento della Logica nelle scuole non è ancora diffuso quanto dovrebbe. Con questo articolo abbiamo suggerito una proposta per rendere l'argomento più interessante da imparare per gli studenti (e, crediamo, anche più piacevole da insegnare per il docente) applicando la Logica Proposizionale alla risoluzione di alcune categorie di indovinelli del celebre autore R. Smullyan.

Notiamo infine che sarebbe interessante in sé e utile per sviluppi successivi avere dati concreti sull'efficacia di queste proposte. Al momento l'autore non può fornirne perché i corsi svolti finora hanno coinvolto un esiguo numero di docenti e studenti e non prevedevano verifiche finali. Vale però la pena di sottolineare che tali corsi hanno sempre evidenziato un sincero interesse da parte dei discenti. Pertanto l'autore invita gli insegnanti interessati a trasporre e proporre le attività nelle loro classi e discuterne per eventualmente proporre alla rivista la pubblicazione dei risultati conseguiti.

## RINGRAZIAMENTI

Ringrazio con piacere e riconoscenza tutti coloro che hanno contribuito in un modo o in un altro a questo articolo: mia madre per avermi regalato, il Natale di ventitre anni fa, "Alice nel paese degli indovinelli" e "Il mio primo libro di Logica", dai quali ho tratto l'intuizione alla base del presente articolo; il Prof. D.W. Kuecker (Dip. di Matematica, U. of Maryland, USA) per avermi chiarito alcuni punti fondamentali della Logica Proposizionale; la collega L. Casula (Itis "D. Scano", Cagliari) per una dettagliata lettura critica dell'articolo risultante in parecchi miglioramenti; l'ex collega S. Remondini e l'ex studente Michele Atzeni (entrambi del Liceo Scientifico "L.B. Alberti") per avere letto l'articolo ed avermi aiutato con la correzione di bozze; i Proff. R. Giuntini e F. Paoli (Dip. di Scienze della Formazione Primaria, U. di Cagliari) per avermi sempre dato carta bianca nell'insegnamento del corso di "Laboratorio di Logica e Fondamenti della Matematica" in cui ho cominciato a sperimentare questo approccio; la Prof. M. Polo (Dip. di Matematica, U. di Cagliari) per avermi incoraggiato a scrivere il presente articolo.


## RIFERIMENTI


Bellissima F, Pagli P. (1993), *"La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche"*, Sansoni

Bencivenga E. (1984), *"Il primo libro di logica"*, Bollati Boringhieri

Cialdea Mayer M. (2010), *"Introduzione alla Logica Proposizionale"*, http://cialdea.dia.uniroma3.it/teaching/pf/logica.pdf

Crook J.F. (2011), *"A Pencil–and–Paper Algorithm for Solving Sudoku Puzzles"*, **Notices of the AMS**, 56, 4, 460-468, http://www.ams.org/notices/200904/tx090400460p.pdf

Gentilini P. (2009), *"La Logica nelle Scuole Superiori Italiane"*, Atti del convegno **Logica Matematica, costruzione dei concetti e processi socio-cognitivi**, Salerno, 30 Giugno–3 Luglio 2008, http://www.ailalogica.it/didattica/scuola-superiore.php

Gerla G. (2011), *"Elementi di Logica"*, http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/didattica.html

Herzberg A.M. e Murty M.R. (2007), *"Sudoku Squares and Chromatic Polynomials"*, **Notices of the AMS**, 54, 6, 708-717, http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf

Hofstadter D. (1984), *Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante*, Milano, Adelphi

Piccione P. (1980), "In Search of the Meaning of Senet", **Archaeology**, Luglio-Agosto 1980, 55-58, http://www.gamesmuseum.uwaterloo.ca/Archives/Piccione/index.html

Previale F. (2008), *"Due Crediti di Logica"*, http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/previale/logica.pdf

Rokicki T. (2010), *"Twenty-two moves suffice for Rubik's Cube"*, **Math. Intelligencer**, 32, 1, 33-40

Smullyan R. (1979), *The Chess Mysteries of Sherlock Holmes*, London, Hutchinson

Smullyan R. (1981), *Qual'è il titolo di questo libro?*, Bologna, Zanichelli

Smullyan R. (1988), *Alice nel paese degli indovinelli*, Bologna, Zanichelli

Taalman L. (2007), *"Taking Sudoku seriously"*, **Math Horizons**, 15, 5-9, http://educ.jmu.edu/~taalmala/sudoku_mathhorizons.pdf

## APPENDICE: IL SISTEMA *MIU* E IL SISTEMA pq.

In “Gödel, Escher, Bach: un’eterna ghirlanda brillante” D. Hofstadter si occupa del concetto di “intelligenza” avendo come obbiettivo quello di definire cosa si debba intendere per “intelligenza artificiale”, senza dubbio uno dei temi principali della scienza dei prossimo cento anni. Nella prima sezione del suo libro Hofstadter esamina il ragionamento umano (e dunque la Logica) e in particolare costruisce i seguenti due sistemi astratti per illustrare due concetti fondamentali per la comprensione della logica e della matematica.

### 4.1 IL SISTEMA *MIU*

A volte per capire qualcosa su di un sistema è necessario *uscirne* per esaminarlo dall’esterno, cioé allargare il sistema originario ad un nuovo (*meta-*)sistema abbastanza potente da poterci dare le informazioni desiderate. Capire come “insegnare” ad una macchina ad “andare oltre” è una delle grandi sfide del campo della Intelligenza Artificiale.

Per esemplificare questo concetto Hofstadter considera il seguente sistema matematico, che chiama *MIU*. Gli oggetti del sistema *MIU* (i *pezzi* del gioco) sono le tre lettere *M*, *I* e *U*. L’unico assioma del sistema (il *punto di partenza*) è la stringa *MI*. Le regole del sistema sono le seguenti:

1. *Se una stringa termina per I, le si può aggiungere una U* (ad esempio, da *MI* possiamo dedurre *MIU*).
2. *Se una stringa comincia per M, possiamo raddoppiare tutto ciò che segue la M* (ad esempio, da *MIU* possiamo dedurre *MIUIU*).
3. *Qualunque serie di tre I consecutive all’interno di una stringa può essere rimpiazzata da una U* (ad esempio, da *MUIIII* possiamo dedurre sia *MUUI* che *MUIU*).
4. *Qualunque serie di due U consecutive può essere cancellata* (ad esempio, da *MIUUI* possiamo dedurre *MII*).

La domanda che pone Hofstadter è se sia o meno possibile dedurre, all’interno del sistema *MIU*, la stringa *MU*. Il punto è che le stringhe che è possibile creare nel sistema *MIU* sono chiaramente infinite e quindi, mentre sarebbe possibile dedurre *MU* rimanendo dentro il sistema qualora se ne trovasse una dimostrazione diretta, è impossibile dimostrarne la sua indeducibilità perché questo significherebbe generare *tutte* le stringhe del sistema e verificare che tra di loro non si trova *MU*.

Dopo qualche tentativo di dimostrazione ci si convince che per risolvere il problema è opportuno uscire dal sistema, cioé *esaminare* (piuttosto che *usare*) gli assiomi cercando di dedurne qualche loro (meta-)proprietà che consenta di risolvere il problema. Ad esempio risulta utile dimostrare che gli assiomi 1–4 non possono generare, a partire da *MI*, una stringa che contenga un numero di *I* che sia un multiplo esatto di 3...

### 4.2 IL SISTEMA pq

La matematica non si occupa di concetti ma di relazioni. Questo fatto è stato immortalato da una celebre massima di Bertrand Russell: “Mathematics is the only science where one never knows what one is talking about nor whether what is said is true"[7]. In altre parole, la matematica non afferma mai che qualcosa sia vero in assoluto ma piuttosto che qualcosa discenda da determinate premesse.

Ad esempio, che la somma degli angoli di un triangolo sia $\pi$ non è vero in assoluto: è senz'altro vero nella geometria Euclidea ma falso nella geometria *ellittica*, cioè la geometria della sfera (dove le "rette" sono i cerchi massimi). Infatti è facile costruire triangoli (i cui lati sono segmenti di cerchi massimi) la cui somma degli angoli è maggiore di $\pi$: basti pensare ad un triangolo avente un vertice nel polo nord e gli altri due all'equatore[8].

Per esemplificare questo fatto Hofstadter introduce il sistema **pq** (chiamato **pg** nella versione italiana). Gli oggetti del sistema sono i caratteri **p**, **q** e $-$. Gli assiomi sono infiniti ma si possono scrivere compattamente come segue: *se x rappresenta un qualunque numero di segni "$-$", allora* $x\mathbf{p}-\mathbf{q}x-$ *è un assiome del sistema* **pq**. Infine c'è un'unica regola di inferenza: *dati tre gruppi x, y e z di segni "$-$", se* $x\mathbf{p}y\mathbf{q}z$ *è un teorema allora anche* $x\mathbf{p}-y\mathbf{q}-z$ *è un teorema.* Ad esempio $-\mathbf{p}-\mathbf{q}--$ è un assioma (quando $x$ è uguale ad un singolo segno "$-$") e da questo assioma ricaviamo immediatamente il teorema $-\mathbf{p}--\mathbf{q}---$ dalla regola di inferenza.

Hofstadter fornisce due diverse interpretazioni di questo sistema che danno un significato concreto ai suoi teoremi. In entrambe ogni successione $x$ di segni "-" viene interpretata come il numero di tali segni presente in $x$.

Nella prima **p** e **q** vengono interpretati rispettivamente come "sommato a" e "è uguale a"; ad esempio il teorema $-\mathbf{p}--\mathbf{q}---$ si interpreta come "1 sommato a 2 è uguale a 3". Che questa interpretazione sia lecita viene dal fatto che tutti gli assiomi sono consistenti con essa (perché "$x$ sommato a 1 è uguale a $x+1$") e cosí pure lo è la regola di inferenza (perché se "$x$ sommato a $y$ è uguale a $z$" allora anche "$x$ sommato a $y+1$ è uguale a $z+1$").

Nella seconda invece **p** e **q** vengono interpretati rispettivamente come "è uguale a" e "sottratto da"; ad esempio il teorema $-\mathbf{p}--\mathbf{q}---$ si interpreta come "1 è uguale a 2 sottratto da 3". Che anche questa interpretazione sia lecita viene dal fatto che tutti gli assiomi sono consistenti con essa (perché "$x$ è uguale ad 1 sottratto da $x+1$") e cosí pure lo è la regola di inferenza (perché se "$x$ è uguale a $y$ sottratto da $z$" allora anche "$x$ è uguale a $y+1$ sottratto da $z+1$").

È chiaro da questo esempio che il sistema **pq** *non ha nessun significato intrinseco* e quindi "non dice nulla di concreto". Il sistema afferma semplicemente che, ad esempio, dalle sue premesse discende necessariamente $-\mathbf{p}--\mathbf{q}---$ ma non sostiene certo che $-\mathbf{p}--\mathbf{q}---$ sia una "verità assoluta" nè che tale affermazione abbia un qualunque significato concreto. È importante portare gli studenti a capire che lo stesso vale per qualunque teoria matematica.

[7] La Matematica è l'unica scienza in cui uno non sa mai di cosa sta parlando nè se ció che si afferma sia vero o meno.

[8] Per la precisione si può dimostrare che in geometria ellittica la somma dei tre angoli di un triangolo è sempre superiore a $\pi$, cosí come nella geometria iperbolica la somma è sempre minore di $\pi$.